Dieser Beitrag wurde am 01.02.2015 um 08:52:37 in idiota de mente erneut veröffentlicht

Verstrickungen um die Zahl π

**Mit Stock und Strick**

In einem Kinderbuch über ägyptische Pyramiden erzählte der Autor über einen Jungen, einen Novizen des Ammun-Tempels, der von den Priestern in ein Erdloch geworfen und auf Brot und Wasser gesetzt wurde, bis er das Rätsel über das Verhältnis zwischen dem Kreisdurchmesser und der Kreislänge löste. Die einzigen Messinstrumente, die ihm gewährt wurden, waren Stock und Strick.

Ein Happy-End war vorprogrammiert. Ein strahlender Held der aufkommenden mathematischen Wissenschaft war geboren – der Junge hatte das Rätsel gelöst und kam auf das Verhältnis, das dem Annäherungswert von **π** entspricht. Mehr als das war anscheinend aus dem Strick und Stock auch nicht herzuleiten.

Die Zahl erwies sich in vielen praktischen Belangen – vom Bauwesen, über die Landvermessung und Astronomie bis zu Kunst und Handwerk als unentbehrlich. Nur nicht genau genug. Wie sich später herausstellte. Und genauer ging es gar nicht, denn die Zahl ist irrational. Das heißt, ihr Teilungsverhältnis ist unendlich. Wenn man die Kreislänge durch den Durchmesser teilt.

Und wenn nicht? Wenn dieses Verhältnis über ein anderes, harmonisches dargestellt wird? Die Frage kommt jedem halbwegs gebildeten Menschen belanglos bis dumm vor. Aber ich frage mich das manchmal trotzdem und zwar aus gutem Grund. Mir scheint manchmal, dass wir des öfteren bereit sind, die alten Gelehrten, Baumeister und Künstler für eine plumpe Nichtigkeit zu vergöttern, indem wir ihnen unterstellen, diese Nichtigkeit ernst genommen zu haben.

Über die Misere mancher sich in letzter Zeit häufenden wissenschaftlicher Höhenflüge kann man sich lange genüsslich auslassen - „то у них собаки лают, то руины говорят...“, hat seiner Zeit Wladimir Wysotzky spöttisch gesungen – „die Wissenschaftler hätten entdeckt, dass Hunde bellen und die Ruinen sprechen“. So flackern von Zeit zu Zeit Meldungen auf über Feststellungen wissenschaftlicher Studien, dass Hunde Intelligenz besitzen (sicherlich im definitorischen Rahmen einer Theorie darüber, was unter Intelligenz zu verstehen ist) oder dass es gelungen ist, die Zahl π noch weiter bis zur „zigsten“ Stelle zu errechnen, ohne dass man den Wahrheitswert der jeweiligen Theorie unter die Lupe nimmt. Die Erfolge der experimentellen Wissenschaft bewirken zuweilen den Missbrauch der experimentellen Methoden auf Kosten der Theorie. Sitzen wir in einem Boot und haben Ruder in der Hand, so werden wir noch nicht paddeln, nur weil wir es können, sondern erst, wenn das Land in Sicht ist.

In der Tat, welch größeren wissenschaftlichen Sinn sollte in Falle der Zahl π eine primitive Teilung einer Zahl durch die andere haben, zumal das Ergebnis nicht mal feststellbar ist? Und das sollen die Erbauer der Pyramiden für das höhere Wissen gehalten haben? Kann es sein, dass dieses Annäherungsverhältnis einfachheitshalber den einfachen Steinmetzen und Maurern vorbehalten war, während die Priester und Architekten es besser und genauer wussten? Und wenn ja, dann was wussten sie eigentlich? Wie konnten sie über Stock und Strick hinausgehen?

Aber zunächst gilt es zu prüfen, ob es notwendig ist, über diese Methode hinauszugehen. Jede Länge, auch die Kreislänge lässt sich als eine Strecke denken. Und jede Strecke, wie zum Beispiel, der Durchmesser - als ein Kreis. Das Verhältnis von **π** würde demnach dem Verhältnis zwischen zwei Kreislängen entsprechen oder zwischen zwei Durchmessern von zwei unterschiedlich großen Kreisen, beide in natürlichen Zahlen dargestellt. Nun, das ist gerade der springende Punkt. Wie kann das Ergebnis der Teilung einer beliebigen natürlichen Zahl durch die andere Zahl stets eine irrationale Zahl zur Folge haben? Und das sollten die alten Gelehrten einfach so hingenommen haben? Man würde es verstehen, wenn die Kreislängen oder Durchmesser wenigstens nicht messbar wären und stets nur Annäherungswerte lieferten. Aber das ist nicht der Fall.

Liegt also das Problem der Irrationalität allein in der Methode der Berechnung, zumindest im Fall von **π**? Bevor wir uns mit dieser Frage befassen, versuchen wir uns einfach vorzustellen, zu welchem Zwecke solche Berechnungen notwendig waren. Man will zum Beispiel wissen, wie dick der Baum ist, um sicher zu gehen, dass sich der Stamm als tragfähiger Balken eignet. Mit dem Strick wird sein Umfang gemessen und nun? Man teile durch **π** und schon hat man seinen Durchmesser. Man will also aus der bekannten Größe der Kreislänge auf den Durchmesser kommen. Ob man diese Strecke anders ermitteln kann?

Das müsste zu schaffen sein. In der Tat, stellt die Kreislänge nichts anderes dar als eine Strecke. Oder wenn man den Kreis streckt – zwei Strecken der halben Kreislängen. Nagelt man den Kreis an einem Punkt fest und zieht den Strick gleichzeitig zu den Seiten, so bekommt man ein Dreieck. Man kann so verschiedene Dreiecke produzieren, zum Beispiel, gleichschenklige sowie ein gleichseitiges Dreieck. Und ihre Höhen werden verschieden sein, aber die Summe der Seitenlängen bleibt stets die gleiche.

Empirisch nachprüfbar lässt sich der Kreis zu einem gleichseitigen Dreieck umformen - man braucht nur die Kreislänge durch 3 teilen. Die Höhe dieses Dreiecks bildet sodann den Durchmesser des gestreckten Kreises.

Also wenn zum Beispiel die Kreislänge 12 beträgt, so lässt sich aus diesem Kreis ein gleichseitiges Dreieck jeweils mit den Seitenlängen von 4 formen. Das Verhältnis der Seitenlänge zur Höhe des Dreiecks lässt sich nach dem Satz von Pythagoras errechnen: c² - (1/2)² = b², wo b = Höhe des Dreiecks und in unserem Fall √12. Soll das nun heißen, dass die Kreislänge immer über die diese Gleichung zu errechnen ist? Stimmt das? Oder steckt irgendwo doch ein Fehler drin? Ferdinand von Lindemann sei Dank, die Quadratur des Kreises gilt als unmöglich. So müssen wir nach anderen Wegen suchen.

Man kann auch weitere Transformationen der Kreislänge unternehmen. So stellt die Seitenlänge eines gleichseitigen Dreiecks die kleinere Kathete eines gleich großen rechtwinkligen Dreiecks und somit den Durchmesser gleich großen Kreises dar. Interessanterweise bildet solche Transformation auch das berühmte „ägyptische Dreieck“ mit den Seiten 3, 4, 5 und andere klassische pythagoreische Trippel. Dieses Verhältnis gilt für die gesamte Trippelreihe, die damit in der Antike als Katalog „harmonischer“ Kreislängen hätte genutzt werden konnte und für das die quadratische Funktion anwendbar wäre, so zu sagen – Berechnung „Pi mal Daumen“ für die schlichen Gemüte. Aber trotz der Übereinstimmung der Seitenlängen mit der Kreislänge sind die Kathetenlängen der pythagoreischen Trippel leider Gottes stets von dem Durchmesser verschieden.

Dieser Umstand verspricht jedoch mindestens die Möglichkeit einer kommensurablen Lösung für die Relation, die traditionell durch π repräsentiert wird. Aber welche ist das nun?

Fassen wir das Erreichte zusammen. Betrachtet man das aus der Kreislänge geformte gleichseitige Dreieck genau, so stellt man fest, dass die Höhe dieses Dreiecks den Durchmesser des dazugehörigen Kreises ausmacht, nicht aber die Seitenlänge, von der sie geringfügig abweicht. Es wird sofort klar, dass eben diese Abweichung den inkommensurablen Wert der π-Berechnung ausmacht (2R x 3) + (0,14…. x 2R).

Andererseits bildet die Höhe des Dreiecks die größere Kathete eines rechtwinkligen Dreiecks, so dass für die Berechnung ihrer Länge der Satz von Pythagoras angewandt werden kann: Höhe b = √(c² - a²), wo (c + a) die Länge des Halbkreises ausmacht. Vorausgesetzt, man kennt den Wert der Kreislänge. Andererseits ist man auf die Zahl π angewiesen.

Außerdem ist Quadratwurzelziehung in einigen Fällen ein ziemlich unsicheres Unterfangen – man stößt laufend auf Annäherungswerte. Aus praktischer Sicht nicht gut zu gebrauchen, da bleibt man lieber bei der Zahl π. Hinzuzufügen wäre noch die Tatsache, dass die Kenntnis dieser Zahl anscheinend bereits lange vor Pythagoras verbreitet war. Seine Überzeugung über die Unmöglichkeit der Existenz irrationaler Zahlen sollte somit nicht seinem Satz entspringen, sondern der Kenntnis einer anderen kommensurablen Lösung.

Und zu guter letzt, sein Satz kann halbwegs sicher nur in Kenntnis der Kreislänge angewandt werden, nicht umgekehrt – aus dem Durchmesser auf die Kreislänge ohne die Zahl π zu schließen ist beschwerlich und nicht fehlerfrei.

So messe ich die Dreieckshöhe in unserem Beispiel und komme auf 3,5 bei einer Seitenlänge von 4. Aus der Wurzel von 12 resultiert diese Zahl jedoch nur als Annäherungswert. Bedenke man die Tatsache, dass die Fehlerquote mit der Größe des Durchmessers exponentiell ansteigt, so sollte man sich darauf nicht verlassen.

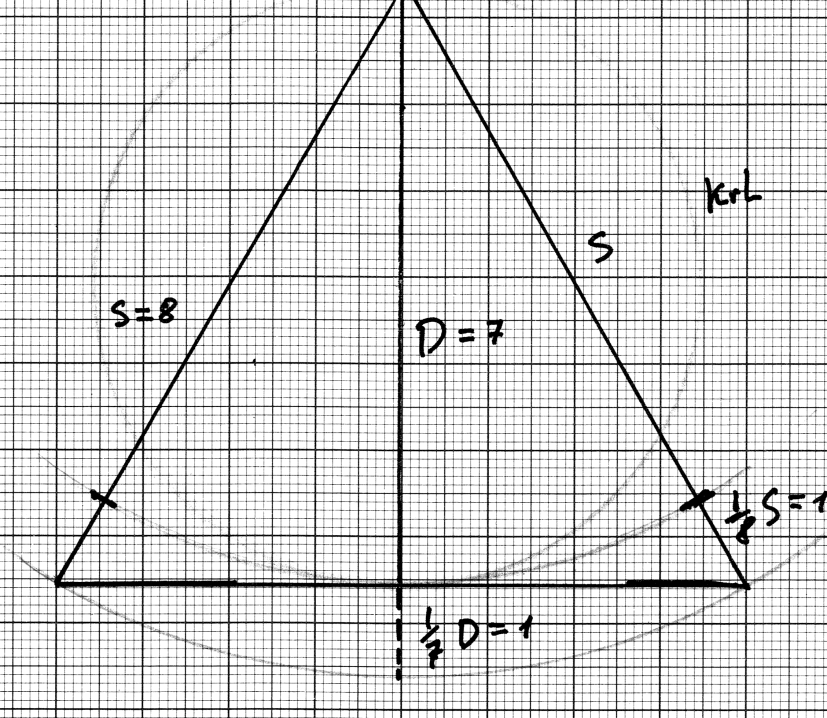
Was war also die kommensurable Lösung von π, wenn es eine gab?

Kehren wir zu Pythagoras und seinen Zeitgenossen zurück. Bekanntlich folgten sie dem Anschaulichkeitsgebot der euklidischen Geometrie, wonach als erwiesen nur das galt, was mit Zirkel und Lineal, oder bei uns – mit Stock und Strick bewiesen wird. Vergleichen wir nun die Längen des Durchmessers und des dazugehörigen gleichseitigen Dreiecks, so stellen wir eine Längendifferenz fest, die 1/7 des Durchmessers ausmacht. Die Summe dieses Anteils und des Faktors 3 (Anzahl der Seiten) bildet den Wert von π. Der genaue Wert dieses Faktoranhangs ist zwar genau so schwer zu errechnen wie die Zahl π selbst (vgl.: 1/7 = 0,1428571428…), aber als Streckenabschnitt einer bestimmten Länge sehr wohl messbar: 1/7 von 3,5 ist 0,5. Die Verwendung von π repräsentiert somit die Addition des dreifachem Durchmessers mit dem Produkt der Multiplikation des Durchmessers und eines Siebtels: 3D +(D x 1/7). Dieses letztere Produkt stellt aber seinerseits das Siebtel des Durchmessers dar. So lässt sich für die Kreislänge eine schlichtere Formel aufstellen: 3D +1/7D.

Die Überprüfung über den Faktor π ergibt eine geringfügige Abweichung, die aber ihrerseits direkt vom Ergebnis der Errechnung des Wertes von 1/7 abhängt, denn dieser Wert bestimmt den Faktor π selbst: π = 3 + 1/7. Mit anderen Worten, diese Abweichung ist mit der Ungenauigkeit der Zahl π begründet, nicht aber unserer Berechnung. Denn die Anwendung dieser alternativen Formel ermöglicht eine ganzzahlige Lösung. So resultiert aus dem Durchmesser von 7 eine Kreislänge von 22 (7 x 3 + 1), statt 21,98 bei π-Wert von 3,14 (der bekanntlich einen Annährungswert darstellt) und beim Durchmesser von 3,5 eine Kreislänge von 11, statt 10,99.

Aber das ist nun mal so eine Sache mit den Anteilen. „Sokrates, - fragten den alten Weisen Schüler von Protagoras, - du behauptest, dass du weißt, dass du nichts weißt. Aber wenn du das weißt, dann weißt doch etwas und folglich weißt du alles …“ - „Wovon?“ – fragte Sokrates. Auch hier wissen wir, dass der besagte Anteil von π ein Siebtel des Durchmessers ausmacht, aber welchen Anteil stellt dieser Wert bei der Seiten- und somit der Kreislänge dar? Nun fragen wir uns, warum müssen wir bei unserer Berechnung von einem Siebtel ausgehen, wenn dieses zugleich ein Achtel der Seitenlänge bildet? Oder liegt ein Messungsfehler vor? Tatsache, dem Durchmesser von 3,5 entspricht die Kreislänge von 11 und nicht von 12, ebenso bei der Kreislänge von 24 beträgt der Durchmesser ganze 7,64 statt bloß 7, was darauf zurückzuführen ist, dass die Höhe des kreisgleichen gleichseitigen Dreiecks nicht genau dem Durchmesser dieses Kreises entspricht. Wie es aussieht, lässt sich durch Triangulation eines Kreises der Durchmesser eines anderen Kreises errechnen. Nur stehen diese beiden Kreise in einer nachvollziehbaren Relation zueinander: 1/7 des Durchmessers des kleineren Kreises stellt 1/8 des Drittels des Umfangs eines größeren Kreises dar. Daraus lässt sich auch die Relation für die Triangulation des kleineren Kreises ableiten: 1/8 x 1/3 = 1/24 pro Seite des gleichseitigen Dreiecks.

Sollte ich, also aus dem Kreisumfang von 24 den Durchmesser dieses Kreises ermitteln, so teile ich den Umfang durch 3 und ziehe von dem Ergebnis 1/24 ab. Somit lässt sich diese Formel umkehren und auch zur Errechnung des Durchmessers ausgehend von der bekannten Kreislänge verwendet werden: D = KrL(Kreislänge): 3 – 1/24 S(Seitenlänge). Für die Kreislänge von 24 resultiert daraus: (24 : 3) – (8 : 24) ≈ 7,666 ..., ein Wert, der mit der Teilung durch π vergleichbar ist: 24/π = 7,6433… .



Wenden wir diese proportionale Relation im besten Geiste der antiken Mathematik an, so werden wir feststellen, dass die Zahl π überflüssig wird. So, teile man den Durchmesser durch 7 und addiere das Ergebnis mit dem dreifachen Wert des Durchmessers, dann kommt man auf die Kreislänge ohne diese Zahl und teilweise (je nach Teilungsfähigkeit des Durchmessers) mit akzeptabler Präzision. Oder man teile die Kreislänge durch 3 und ziehe von dem Ergebnis 1/24 des Ergebnisses ab. Was braucht man mehr? Wozu ist die ganze Aufregung um die Irrationalität dieser Zahl? Warum sollen numerische Relationen nur auf Teilung basieren, auch dort, wo sich nichts teilen lässt? Wahrlich, manche Probleme haben keine Lösung, nur weil es keine Probleme sind.

So hat Ferdinand von Lindemann bewiesen, dass die Quadratur des Kreises wegen der Transzendenz der Zahl π keine Lösung hat. Und davon, dass diese Quadratur existiert, weiß Fritzchen zu berichten. Als dieser umtriebige Bengel eine Empfehlung fürs Gymnasium bekommen hatte, fuhr die ganze stolze Familie an die Ostsee in den Urlaub. Im Zug dachte Fritzchen über seine höhere Schullaufbahn nach.

„Vater, - fragte er schließlich. „Unser Lehrer sagte, wenn wir, etwas vom Lehrstoff nicht verstehen, müssen wir die Eltern fragen. Kann ich dich was fragen?“ „Aber sicher, mein Großer, frag nur…“ „ Naja, neulich erzählte der Lehrer von der Quarda.. , eh Quadratur des Kreises und ich habe nichts verstanden. Was ist diese Qua…dratur?“ „Nun, schau mal. Wir fahren jetzt im Zug und die Räder von Waggon sind rund, also Kreise. Aber hörst du, wie es hin und wieder klopft – Tak-tak, tak-tak..?“ „Ja.“ „Das ist eben das besagte Quadrat im Kreise, das zuschlägt.“

Sowas doofes hätte sich kein alter Grieche oder Ägypter ausdenken können, schon weil die Fragestellung allein ihm undenkbar erschienen wäre. Ihr Bedarf an mathematischen Kunstgriffen war mit ihrer Proportionslehre und der Verrechnung der Anteile ausreichend gedeckt. Und es geht gar nicht darum, wie genau ein Siebtel von „1“ errechnet ist, und ob überhaupt ein Siebtel in der Zahl π steckt, oder ein anderer, dennoch messbarer Anteil. Entscheidend ist die Frage, welcher Aufgaben sich die Wissenschaft von heute verpflichten soll – die Zahl π weiter zu errechnen, oder ihre definitorische Grundlage zu prüfen und daraufhin die Zusammenhänge unterschiedlicher numerischen Relationen zu erforschen. Diese Frage steht seit langem im Raum – die Antwort jedoch lässt auf sich warten.

El Sid, Quetzdölsdorf 2015