Dieser Beitrag wurde am 31.01.2015 um 12:06:25 in idiota de menteveröffentlicht

Das Fermatsche Problem mit Pythagoras

Erinnern wir uns – die 21 Knoten und das griechische Alphabet? Alpha ist nicht gleich Beta und schon gar nicht Omega - hätte Pythagoras beim Einwand von Hipassos ausrufen können. Und wenn zwei Katheten gleich lang sind, dann gilt 2a² = c², was nicht der Fall ist. Und schon wäre der Einwand aus der Welt geschafft. Oder doch nicht? „A“ ist nicht gleich „B“ - Kant erhob diese alphabetische Belanglosigkeit zum Axiom, auf dessen Grundlage Frege seine „Grundlagen der Arithmetik“ baute. Was haben die Mathematiker bloß für ein Problem mit dem Alphabet? Und was hat Fermat damit zu tun?

Nun ist denkbar, dass sein kurzer Beweis auch denkbar einfach war und ihm beinahe belanglos erschien, sonst hätte er ihn sicherlich ausgebaut und veröffentlicht. Denkbar ist auch, dass er ihn über das pythagoreische Tripel erbracht hatte, sonst wäre er nicht so knapp ausgefallen. Aber was waren seine Denkvorgänge dabei? Wir versuchen sie zu rekonstruieren.

Betrachte man die Potenz einer Zahl höher als 2 als Multiplikation dieser Zahl oder ihres höheren Produktes mit dem Quadrat dieser Zahl, so dürfte es für den Gegenbeweis der Fermat´schen Vermutung genügen, die pythagoreische Formel so auszulegen, dass jede höhere Potenz der Kathetenlänge als Multiplikation dieser Länge oder ihres Produktes mit dem Quadrat der Kathete dargestellt wird.

Nur wissen wir von dem pythagoreischen Tripel, zum Beispiel - 3, 4, 5, dass seine Formel für alle weiteren Tripel gilt, die durch die Multiplikation jeder Zahl mit einem und demselben Faktor gebildet werden: vgl. 6, 8, 10; 9, 12, 15 etc.

Das heißt, für eine Potenz höher als „2“, kann diese Potenz nur für eine von drei Zahlen gelten:

(a × a²) + (b × a²) = c × a² (z.B. für a³)

Betrachten wir die Annahme der Fermat´schen Vermutung genauer, so kommen wir zum Ergebnis, dass sie nichts anderes besagt, außer dass diese in Bezug auf die pythagoreische Formel nur für den Fall gilt, wo b² = a², also 2a² = c², was nur bei den rechtwinkligen gleichschenkligen Dreiecken der Fall sein kann.

Nur konnten wir uns im vorigen Beitrag über die Knoten von Pythagoras überzeugen, dass die pythagoreische Formel ausgerechnet für diese Dreiecke nicht gilt oder man begnüge sich mit einer irrationalen Zahl.

Die Dinge können auch aus einem anderen Winkel betrachtet werden. Was heißt eigentlich potenzieren oder gar multiplizieren? Man nimmt eine Zahl so und so viele Male und wenn es genauso so viel Mal ist wie die Zahl selbst, dann heißt es Quadratpotenz. Nicht mehr und nicht weniger. Also man kann die Zahl mal mehr, mal weniger Male nehmen und ein bestimmtes Ergebnis erzielen.

Nun soll ein Multiplikationsprodukt als Summe von zwei anderen Multiplikationsprodukten verstanden werden. Zufälligerweise sind in einigen Fällen all diese Produkte das, was wir Quadratpotenzen nennen. Wenn wir uns durch die Übereinstimmung der Ergebnisse mit bestimmten geometrischen Gegebenheiten nicht blenden lassen, ist der Fall klar – das Zusammenfallen des einen Produktes mit der Summe anderer Produkte kann prinzipiell als nachvollziehbar betrachtet werden. Also müssen wir herausfinden, unter welchen Voraussetzungen die Fermat´sche Annahme als Summe von Multiplikationsprodukte wahr ist.

Zum Beispiel, bei den pythagoreischen Tripeln. Es stellt sich dabei heraus, dass dieses Zusammenfallen nicht nur die Summe der Quadrate betrifft, sondern auch anderer Produkte. Nun sind unter diesen Produkten keine weiteren potenzierten Werte zu finden. Stattdessen müssen die Zahlen des Tripels mit den Faktoren ausgestattet sein, die selbst ein pythagoreisches Tripel bilden.

Zum Beispiel, wenn Zahlen des einen Tripel mit den Faktoren multipliziert werden, die untereinander das gleiche pythagoreische Tripel bilden, so erhalten wir die biquadratische Gleichung nach dem Satz von Pythagoras: (3 x 3) + (4 x 4) = 5 x 5. Die Gleichung gilt auch für andere Faktoren, sofern sie das Vielfache der jeweiligen Zahlen dieses Trippel ausmachen:

(3 x 6)+(4 x 8) = (5 x 10), oder (9 x 3) + (12 x 4) = (5 x 15).

Also bilden die Multiplikationsfaktoren als Quadratpotenzen keine Ausnahme. Und das, was für die pythagoreischen Tripel gilt, ist mit Sicherheit auch für die anderen Tripelreihen gültig, die der biquadratischen Gleichung genügen. Nur besteht die Eigenart der Faktorentrippel darin, dass sie alle Produkte des Ausgangstrippel mit einem und demselben Faktor bilden: (3 x 6) + (4 x 8) = (5 x 10) = ((3x(3 x 2) + ((4 x (4 x 2) = 5 x (5 x 2) usw.

Legen wir diese Wertezusammensetzung in Termini der Fermat´schen Vermutung aus, so kommen wir zur folgenden Formel: (a² × f) + (b² × f) = c² × f.

Wenden wir uns der Fermat´schen Vermutung zu, so müssen wir jetzt lediglich beweisen, dass diese multiplizierten Werte ihrerseits Potenzen der jeweiligen Zahlen bilden. Nun, wissen wir von den Potenzwerten, dass sie sich auch zerlegen lassen, z.B.: 3³ = 3² × 3; 4³ = 4² × 4; 5² = 5² × 5, usw. Wie man sieht, sind alle Faktoren jeweiliger Tripelzahlen verschieden: f, f´, f´´.

Somit lässt sich die Formel der Fermat´schen Vermutung folgendermaßen darstellen:

aⁿ + bⁿ = cⁿ = (a² × f) + (b² × f´) = c × f´´.

Aber : f ≠ f´≠ f´´, deshalb ((a² × f) + (b²× f) = c²× f ≠ (a² x f) + (b² x f´) und folglich:

aⁿ + bⁿ ≠ (c² × f) ≠ cⁿ, wo cⁿ = c² × f´´.

Ein endgültiger und vor allem, formvollendeter Beweis ist das sicherlich nicht, denn es erfolgte kein Ausschluss unzähliger anderer Optionen, aber er ist kurz genug, um am Rand eines Manuskripts notiert zu werden. Nur haben wir es mit der Wissenschaft immer schwerer – mit jedem weiteren Jahr steigt die Anzahl der denkbaren Ausschlussoptionen. Drum belassen wir es dabei, als hätten Pythagoras oder Fermat selbst diesen Beweis aufgrund seiner Belanglosigkeit nicht aufgeschrieben.

Zum Schluss bleibt nur noch zu vermerken, dass dieser Gegenbeweis der Fermat´schen Vermutung wahr ist, sofern diese sich auf den Satz von Pythagoras bezieht. Sie ist also dann und nur dann nicht wahr, wenn der Satz von Pythagoras wahr ist. Und Pythagoras hat bekanntlich Recht. Und er hätte vermutlich den Gegenbeweis auch mit Stock und Strick zu erbringen vermocht und dabei ein paar Kongruenzsätze aufgestellt. Aber er kam leider nicht auf die Idee, diese Annahme zu überprüfen und so blieben seine nicht aufgestellten Kongruenzsätze der Nachwelt vorenthalten. Wie vieles andere mehr.

Diese und viele andere Lücken wurden erst in Laufe der Jahrhunderte geschlossen und nicht zuletzt dank der Fermat´schen Vermutung. Er hat sich zum Glück nicht geschämt, abwegige und auf den ersten Blick belanglose Fragen zu stellen. Denn sie werden erst dann belanglos, wenn sie beantwortet sind. Wir müssen uns immer fragen, egal wie abwegig die Fragestellung auch ist, denn solange keine Antwort vorliegt, ist keine Frage belanglos. Also, warum ist die Banane eigentlich krumm?

El Sid, Quetzdölsdorf 2015